Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Première séance d'exercices –

`relativité restreinte et espace-temps de Minkowski`

Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

Tout au long de ce TP, on se place dans l'espace-temps de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$ et on choisit $(-,+,+,+)$ comme signature de la métrique. Les lettres latines capitales $(P, Q, R, S, A, \ldots)$ désignent des événements de $\mathcal{M}^{1,3}$.

♡ **Exercice 0 : unités naturelles.** En gravitation, on utilise souvent le système d'unités $G = c = 1$ (« unités géométriques »). Montrer que, dans un tel système d'unités, masse, longueur, temps et énergie ont la même dimension :

$$[M] = [L] = [T] = [E].$$

Il n'y a donc qu'une seule dimension non-triviale, qui peut être choisie comme celle de la masse. (*Comparer avec les unités naturelles $\hbar = c = 1$ habituellement utilisées en QFT.)

Correction. La vitesse de la lumière c est une *vitesse*, c-à-d une distance parcourue par unité de temps. Puisque $c = 1$, on a donc

$$1 = \frac{[L]}{[T]} \Rightarrow [L] = [T].$$

D'autre part, on peut utiliser la relation $E \propto mc^2$, qui nous donne

$$[E] = [M].$$

Enfin, grâce aux relations précédentes, nous pouvons écrire

$$G = \frac{[L]^3}{[M][T]^2} = \frac{[L]}{[M]}.$$

Et, puisqu'on prend $G = 1$, nous obtenons finalement

$$\boxed{[L] = [M] = [T] = [E].}$$

♡ **Exercice 1 : futur et passé absolus.** Si Q appartient au futur (respectivement au passé) absolu de P, démontrer les deux affirmations suivantes :

a. Q se produit après (respectivement avant) P pour tous les observateurs inertiels ;

b. si P et Q sont séparés par un intervalle de genre temps, alors on peut trouver un observateur pour lequel ces deux événements se produisent au même endroit.

Correction. Nous donnons ici la correction de l'exercice dans le cas où Q se trouve dans le futur absolu de P, c-à-d que l'on suppose

$$(\Delta s_{PQ})^2 \leq 0, \qquad \Delta x^0_{PQ} \triangleq x^0_Q - x^0_P > 0. \tag{1}$$

Le problème se résout de façon exactement similaire si l'on considère que Q appartient au passé absolu de P.

a. Implicitement, en écrivant (1), on a choisi un référentiel inertiel dont lequel les coordonnées d'un évènement quelconque sont notées x^μ. Démontrer que Q se produit après P pour tous les observateurs inertiels revient à montrer que, dans tout autre référentiel inertiel $x^{\mu'}$ relié à x^μ par une transformation de Lorentz orthochrone [a], on a également

$$\left(\Delta s'_{PQ}\right)^2 \leq 0, \qquad \Delta x^{0'}_{PQ} > 0.$$

La première de ces deux conditions est vérifiée de par la définition même du groupe de Lorentz. Prouver la seconde demande un peu plus de travail. Notons $\Lambda^\mu{}_\nu \in L^\uparrow$ la transformation de Lorentz reliant nos deux référentiels, c-à-d

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Dès lors, on a

$$\Delta x^{0'}_{PQ} = \Lambda^0{}_0 \Delta x^0_{PQ} + \Lambda^0{}_k \Delta x^k_{PQ}.$$

NOTE : dans les deux équations précédentes, on a utilisé la convention de sommation implicite habituelle :

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \triangleq \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \qquad \Lambda^0{}_k \Delta x^k_{PQ} \triangleq \sum_{k=1}^{3} \Lambda^0{}_k \Delta x^k_{PQ}.$$

Par hypothèse, on a $\Delta x^0_{PQ} > 0$. De plus, $\Lambda^0{}_0 \geq 1 > 0$ puisqu'on considère une transformation de $L^\uparrow$. Montrer que $\Delta x^{0'}_{PQ} > 0$ se réduit donc à vérifier l'inégalité

$$\Lambda^0{}_0 \Delta x^0_{PQ} > \left|\Lambda^0{}_k \Delta x^k_{PQ}\right|.$$

Prouvons à présent deux inégalités intermédiaires :

◇ La composante $\mu = \nu = 0$ de la relation $\Lambda^\mu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta^{\mu\nu}$ est donnée par

$$-\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 + \sum_k \left(\Lambda^0{}_k\right)^2 = -1.$$

On a donc

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 = 1 + \sum_k \left(\Lambda^0{}_k\right)^2 > \sum_k \left(\Lambda^0{}_k\right)^2. \tag{2}$$

◇ D'autre part,

$$(\Delta s_{PQ})^2 = -\left(\Delta x^0_{PQ}\right)^2 + \sum_k \left(\Delta x^k_{PQ}\right)^2 \overset{!}{\leq} 0.$$

Cette relation, ainsi que $\Delta x^0_{PQ} > 0$ impliquent la seconde inégalité recherchée

$$\Delta x^0_{PQ} \geq \sqrt{\sum_k \left(\Delta x^k_{PQ}\right)^2}. \tag{3}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\Lambda^0{}_0 \Delta x^0_{PQ} &\overset{(2),(3)}{>} \sqrt{\sum_k (\Lambda^0{}_k)^2} \sqrt{\sum_k \left(\Delta x^k_{PQ}\right)^2} \\ &\geq \left|\Lambda^0{}_k \Delta x^k_{PQ}\right|,\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. Le passage à la dernière ligne est une application directe des inégalités de Cauchy-Schwarz.

b. Si $(\Delta s_{PQ})^2 < 0$, alors il existe un segment de droite de genre temps qui joint P à Q, et qui définit donc un mouvement de vitesse strictement inférieure à la vitesse de la lumière. Un tel mouvement est un mouvement physiquement possible pour un observateur. Pour un tel observateur, P et Q se produisent au même endroit.

---

a. On veut en effet garder identique le sens d'écoulement du temps. Sans cela, Q ne sera clairement plus dans le futur de P.

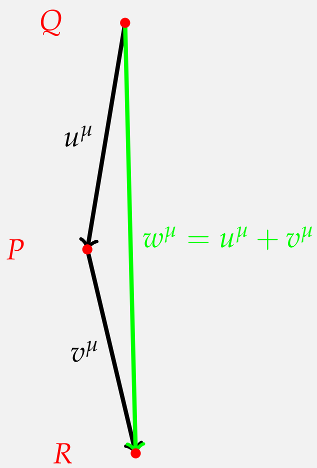
***Exercice 2 : ailleurs absolu.** Si Q appartient à l'ailleurs absolu de P, démontrer les deux affirmations suivantes :

a. Q se produit toujours ailleurs que P ;
b. Il est possible de trouver des observateurs inertiels pour lesquels Q se produit avant, en même temps ou après P.

Correction. Pas détaillée pour le moment... :-/

♡ **Exercice 3.** Si Q est à l'intérieur ou sur le cône de lumière passé de P, on note $Q < P$. Montrer que si $R < P$ et $P < Q$, alors $R < Q$.

Correction. La géométrie du problème est la suivante :



Considérons deux évènements A et B et notons $a^\mu \triangleq \overrightarrow{AB}$. On se convainc aisément que

$$B < A \Leftrightarrow a^0 < 0 \text{ et } a^2 \leq 0.$$

(Ici, a^2 est le carré de la norme de a^μ, et pas la seconde composante de ce vecteur, bien entendu...) Puisque, par hypothèse, $R < P$ et $P < Q$, nous avons donc

$$u^0 < 0, \qquad v^0 < 0, \qquad u^2 \leq 0, \qquad v^2 \leq 0.$$

Et l'assertion que nous voulons démontrer se réduit à

$$w^0 < 0, \qquad w^2 \leq 0.$$

La première de ces deux relations est directe, puisque $w^0 = u^0 + v^0$ et que $u^0, v^0 < 0$. Encore une fois, montrer la seconde demande plus de travail. Nous avons

$$\begin{aligned} w^2 &= (u^\mu + v^\mu)(u^\nu + v^\nu)\eta_{\mu\nu} \\ &= u^2 + v^2 + 2\eta_{\mu\nu}u^\mu v^\nu. \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $u^2, v^2 \leq 0$, il nous reste à montrer que $\eta_{\mu\nu}u^\mu v^\nu \leq 0$. On a (sommations implicites sur k)

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu v^\nu = -u^0 v^0 + u^k v^k \leq -u^0 v^0 + \left|u^k v^k\right|. \tag{4}$$

Or

$$u^2 = -\left(u^0\right)^2 + \sum_k \left(u^k\right)^2 \overset{!}{\leq} 0 \Rightarrow \left(u^0\right)^2 \geq \sum_k \left(u^k\right)^2.$$

Comme le vecteur u^0 pointe vers le passé, nous pouvons écrire

$$-u^0 \geq \sqrt{\sum_k (u^k)^2}.$$

Et, similairement, on peut montrer que

$$-v^0 \geq \sqrt{\sum_k (v^k)^2}.$$

Ces deux relations nous permettent d'écrire, en utilisant (4)

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu &\leq -\sqrt{\sum_k (u^k)^2}\sqrt{\sum_k (v^k)^2} + \left|u^k v^k\right| \\
&\leq -\left|u^k v^k\right| + \left|u^k v^k\right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'avant-dernière ligne a été obtenue en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4. Soit $P < A$ et $A < B$. Montrer que si B appartient au cône de lumière futur de P, alors P, A et B sont sur la même droite de genre lumière.

Correction. On définit les vecteurs

$$u^\mu \triangleq \overrightarrow{PA}, \qquad v^\mu \triangleq \overrightarrow{AB}, \qquad w^\mu \triangleq u^\mu + v^\mu.$$

Comme $B \in C_P^+$, on a

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2u \cdot v \stackrel{!}{=} 0.$$

De la même façon que dans l'exercice 3, on peut montrer que $u \cdot v = \eta_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \leq 0$. Par conséquent, $w^2 = 0$ s'écrit comme la somme de trois termes négatifs ou nuls. La seule possibilité est que ces trois quantités s'annulent identiquement, c-à-d

$$u^2 = v^2 = u \cdot v = 0.$$

Les points P et A (ainsi que A et B) sont donc séparés par des intervalles de genre lumière. Au vu de la géométrie du problème, la seule possibilité est que P, A et B soient tous trois situés sur la même droite de genre lumière.

Exercice 5. Soient P et Q deux événements sur une droite de genre lumière donnée. Montrer que toute courbe causale qui joint P à Q coïncide avec la droite PQ entre P et Q.

Correction. Soit A un point situé sur une courbe causale quelconque joignant P et Q. On a $P < A$ et $A < Q$. De plus, comme, par hypothèse, Q est situé sur le cône de lumière futur de P, on peut utiliser le résultat de l'exercice 4. A est donc situé sur la droite de genre lumière joignant P à Q, ce qui nous permet de conclure.

♡ **Exercice 6.** En utilisant les résultats des exercices précédents, montrer que les lignes droites causales sont les courbes causales qui maximisent le temps propre entre deux événements donnés.

Correction. Soient P et Q deux évènements tels que $P < Q$. Il convient de séparer deux cas :

- ◇ Si $Q \in C_P^+$ (c-à-d si P et Q sont séparés par un intervalle de genre lumière), on a montré dans l'exercice 5 que la seule courbe causale qui joignait P et Q était la droite de genre lumière PQ. Le temps propre de cette courbe causale est nul ;
- ◇ Si $Q \in I^+(P)$, alors P et Q sont séparés par un intervalle de genre temps $\left((\Delta s_{PQ})^2 < 0\right)$. En utilisant le résultat de l'exercice 1.a, on sait qu'on peut trouver un système de coordonnées inertiel Σ tel que P et Q se passent au même endroit. Choisissons P comme l'origine de ce système. Les coordonnées de P et Q dans Σ sont

$$P : (0,0,0,0), \qquad Q : \left(x_Q^0, 0, 0, 0\right).$$

Le temps propre τ de la ligne droite causale joignant P et Q est

$$\tau = \sqrt{-(\Delta s_{PQ})^2} = x_Q^0.$$

Soit maintenant $x^\mu(\lambda)$ une courbe causale quelconque joignant P à Q. Il existe donc $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que

$$x^\mu(\lambda_1) = P, \qquad x^\mu(\lambda_2) = Q.$$

Comparons le temps propre $\tilde{\tau}$ de cette courbe au temps propre τ de la ligne droite :

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - \sum_k \left(\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} \mathrm{d}\lambda \\
&\leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2} \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{d}\lambda = x_Q^0.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\lambda} \geq 0$ puisque la courbe $x^\mu(\lambda)$ est causale. On a donc bien $\tilde{\tau} \leq \tau$.

Les lignes droites causales sont donc bien les courbes causales qui maximisent le temps propre.

Exercice 7 : observateurs dans $\mathbb{R} \times T^3$. Considérons un espace-temps dont la partie spatiale est non pas $\mathbb{R}^3$, mais un trois-tore T^3 de coordonnées $(x, y, z) \sim (x + L, y, z) \sim (x, y + L, z) \sim (x, y, z + L)$. Soient deux observateurs dans cet espace-temps : A est au repos dans ces coordonnées, tandis que B se déplace à vitesse constante v le long de l'axe des x. A et B coincident en $t = 0$, puis tandis que A reste au repos, B fait le tour de l'univers pour intersecter la ligne d'univers de A sans devoir accélérer. Quels sont les temps propres mesurés le long de ces 2 trajectoires entre les 2 moments où A et B se rencontrent à nouveau ? Est-ce en contradiction avec l'invariance de Lorentz ?

Correction. Les deux observateurs A et B se trouvent au même endroit en $t = 0$. Leurs lignes d'univers s'intersectent de nouveau après $\Delta t = L/v$. Plaçons-nous dans le référentiel dans lequel A est au repos. Les temps propres le long des lignes d'univers suivies par A et B sont respectivement donnés par

$$\Delta\tau_A = \sqrt{-(\Delta s_A)^2} = \Delta t = \frac{L}{v},$$
$$\Delta\tau_B = \sqrt{-(\Delta s_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{v}\right)^2 - L^2} = \frac{L}{v}\sqrt{1 - v^2} = \Delta\tau_A\sqrt{1 - v^2}.$$

On a donc $\Delta\tau_B < \Delta\tau_A$.
Refaisons maintenant le calcul dans le référentiel où B se trouve au repos. La situation étant symétrique, il suffit d'inverser A et B dans le raisonnement précédent. Nous trouvons cette fois

$$\Delta\tau_B = \frac{\Delta\tau_A}{\sqrt{1 - v^2}},$$

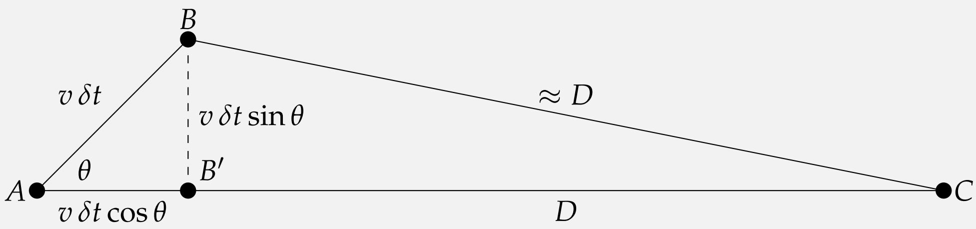
soit $\Delta\tau_B > \Delta\tau_A$. Bien que tout ceci semble en contradiction avec l'invariance de Lorentz (le temps propre devrait être invariant pour tous les observateurs inertiels), il n'en est rien : l'invariance de Lorentz s'applique en effet dans l'espace-temps de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3} \simeq \mathbb{R}^4$ qui est topologiquement différent de l'espace-temps étudié ici, $\mathbb{R} \times T^3$.

♡ **Exercice 8 : mouvement supraluminique.** Dans certains cas, un effet de projection peut amener à penser qu'un objet astrophysique se déplace plus vite que la lumière dans le vide. Considérer un quasar qui éjecte du gaz à une vitesse v et à un angle θ par rapport à la ligne de mire d'un observateur fixe. Projeté sur le ciel, le gaz semble se mouvoir perpendiculairement à la ligne de mire avec une vitesse apparente v_{app}.

a. En supposant que l'observateur se situe à grande distance de la source, dériver une expression pour v_{app} en fonction de v et de θ.
b. Montrer que, pour certaines valeurs de v et de θ, on peut avoir $v_{\text{app}} > c$.
c. Pourquoi ce résultat n'est-il pas en contradiction avec les postulats de la relativité restreinte ?

Correction.

a. Il nous faut d'abord nous poser la question de *ce à quoi correspond réellement* la vitesse apparente v_{app}. Schématiquement, on peut représenter la situation de la façon suivante :



Le quasar est situé en A, l'observateur lointain en C et le jet se propage selon la direction AB. Considérons une portion du jet (de taille négligeable) se mouvant de A vers B à la vitesse v tout en émettant de la lumière (ce qui rend le jet détectable). Supposons qu'un photon quitte le jet en A au temps t_1 et qu'un second soit émis par la même source en B au temps $t_2 = t_1 + \delta t$. La distance séparant A et B est égale à $v\,\delta t$. Les deux photons se propagent à la vitesse c et sont reçus par l'observateur aux temps respectifs t_1' et t_2'. Si l'on suppose que l'observateur est situé loin en comparaison à la taille relative de la source (c-à-d si l'angle $\widehat{ACB}$ est supposé petit), on peut écrire, en première approximation

$$t_1' = t_1 + \frac{D + v\,\delta t \cos\theta}{c},$$
$$t_2' = t_2 + \frac{D}{c}.$$

L'observateur reçoit les deux photons avec un intervalle de temps

$$\delta t' = t_2' - t_1' = \delta t - \frac{v\,\delta t \cos\theta}{c} = \delta t \left(1 - \frac{v\cos\theta}{c}\right).$$

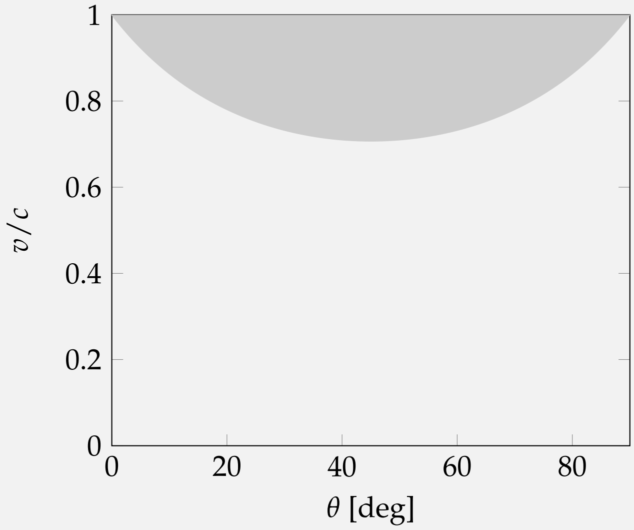
À partir de maintenant, on pose $c = 1$ pour simplifier les expression. Pour l'observateur, la vitesse apparente du jet est égale à la distance apparente entre les points desquels proviennent les deux photons ($\left|\overrightarrow{BB'}\right| = v\,\delta t \sin\theta$) divisée par l'intervalle de temps $\delta t'$ séparant la réception de ceux-ci. On a donc

$$v_{\text{app}} = \frac{v\,\delta t \sin\theta}{\delta t'} = \frac{v \sin\theta}{1 - v\cos\theta}.$$

b. Dans le système d'unités $c = 1$, on a $v_{\text{app}} > 1$ si et seulement si

$$v > \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

Graphiquement, ceci correspond à la situation suivante.



Ici, la région du plan (θ, v) dans laquelle $v_{\text{app}} > 1$ est représentée en gris. On note qu'il existe une vitesse minimale $v_{\min} = 1/\sqrt{2}$ en-deçà de laquelle le mouvement apparent n'est jamais supraluminal.

c. Il n'y a aucune contradiction avec les principes de base de la RR. En RR, c'est la vitesse de déplacement *de matière ou d'information* qui ne peut excéder la vitesse de la lumière. Or, ici, c'est simplement un mouvement *apparent* qui semble être plus rapide que la lumière.

***Exercice 9 : observateurs accélérés.** Inconscient des nombreuses crises majeures qui menacent la vie sur Terre à court et à moyen termes et préférant dilapider sa fortune de façon futile et délétère, un milliardaire envisage d'explorer le trou noir géant situé au centre de notre galaxie à environ 30 000 années-lumière de notre planète. Supposez que le moteur de la fusée fournit une accélération constante de 1g pendant la moitié du voyage et une accélération opposée de 1g pendant la deuxième moitié.

a. Soit τ le temps propre du milliardaire et u^μ sa quadri-vitesse. En se plaçant dans un référentiel inertiel centré sur la Terre et tel que $u^2 = u^3 = 0$, montrer que les équations du mouvement se réduisent à

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}}{\mathrm{d}\tau} = A\,\mathcal{U}, \qquad \mathcal{U} \triangleq \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix},\ A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Intégrer ces équations pour obtenir le temps sur Terre $x^0(\tau)$ et la position de la fusée $x^1(\tau)$. On choisira des conditions initiales adaptées à la situation.

c. À quelle distance se trouvera la fusée après 40 années de vie sur Terre ?

d. Et après 40 années de vie du milliardaire dans sa fusée (dans le cas où la fusée continue toujours avec une accélération constante de 1g) ?

e. Calculer de combien d'années notre richissime inconscient aura vieilli au terme de son voyage.

NB : dans un système d'unités tel que $c = 1$, on notera la coincidence numérique

$$g = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx \frac{10}{(365\cdot 24\cdot 3600)^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{an}\cdot\mathrm{s}} \approx 3\cdot 10^8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{an}\cdot\mathrm{s}} \approx 1\,\mathrm{al}^{-1}.$$

En outre, $\sinh^{-1}(40) \approx 4,38$; $\cosh\Big(\sinh^{-1}(40)\Big) \approx 40$ et $\cosh^{-1}(15000) \approx 10,31$.

Correction.

a. Les relations

$$u^2 = -1, \qquad a_\mu a^\mu = g^2$$

se réécrivent explicitement

$$-\left(u^0\right)^2 + \left(u^1\right)^2 = -1, \qquad -\left(a^0\right)^2 + \left(a^1\right)^2 = g^2.$$

En dérivant $u^2 = -1$, on obtient la condition d'orthogonalité $a_\alpha u^\alpha = 0$, qui se réécrit

$$-a^0u^0 + a^1u^1 = 0.$$

En utilisant ces trois équations, nous avons

$$\left(a^0\right)^2 = \left(a^1\right)^2 - g^2 = \left(a^0\right)^2\left(\frac{u^0}{u^1}\right)^2 - g^2 = \frac{1+\left(u^1\right)^2}{\left(u^1\right)^2}\left(a^0\right)^2 - g^2.$$

On peut résoudre cette équation pour a^0, ce qui donne

$$a^0 = gu^1.$$

Similairement, on obtient la relation

$$a^1 = gu^0.$$

On peut réécrire ces deux équations comme le système matriciel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix}u^0\\u^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & g\\ g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^0\\u^1\end{pmatrix},$$

qui est bien la formulation annoncée dans l'énoncé.

b. Puisque la matrice $A = \begin{pmatrix}0 & g\\ g & 0\end{pmatrix}$ est indépendante du temps, la solution du système d'équations s'écrit

$$\mathcal{U} = \exp(A\tau)\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(g\tau) & \sinh(g\tau)\\ \sinh(g\tau) & \cosh(g\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},$$

avec $C_{1,2}$ des constantes arbitraires. On fixe C_2 en imposant que la fusée commence son voyage sans vitesse initiale en $\tau = 0$:

$$u^1(\tau = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

De plus, la normalisation de la quadri-vitesse $u^2 = -1$ fixe $C_1 = 1$. Notre système d'équations se réduit à

$$u^0(\tau) = \cosh(g\tau), \qquad u^1(\tau) = \sinh(g\tau).$$

En intégrant une seconde fois ces équations avec les conditions initiales

$$x^0(\tau = 0) = 0, \qquad x^1(\tau = 0) = 0,$$

nous obtenons

$$x^0(\tau) = \frac{1}{g}\sinh(g\tau), \qquad x^1(\tau) = \frac{1}{g}(\cosh(g\tau) - 1).$$

c. Si l'on exprime le temps propre τ en années, vu la remarque de l'énoncé, nos équations se réduisent à

$$x^0(\tau) = \sinh\tau, \qquad x^1(\tau) = \cosh\tau - 1.$$

Ici, x^0 est le temps sur Terre, x^1 est la position de la fusée par rapport à la Terre et τ est le temps propre dans la fusée.
La distance parcourue après 40 ans de vie sur Terre est donc

$$x^1 = \cosh\Big(\sinh^{-1}(40)\Big) - 1 \approx 40 - 1 \approx 39\,\text{al}$$

d. Après 40 ans de vie du milliardaire, la fusée se trouve à une distance

$$x^1 = \cosh(40) - 1 \approx 10^{17}\,\text{al}.$$

e. Lorsqu'il arrive à la moitié de son voyage et qu'il s'apprête à décélérer, c-à-d après avoir parcouru 15 000 al, le temps propre du milliardaire $\tau_{1/2}$ satisfait à l'équation

$$15\,000 = \cosh\tau_{1/2} - 1 \Rightarrow \tau_{1/2} \approx \cosh^{-1}(15\,000) \approx 10,3\,\text{ans}.$$

Par symétrie, lorsqu'il arrivera à proximité du trou noir, le milliardaire aura vécu

$$\tau = 2\,\tau_{1/2} \approx 20,6\,\text{années}$$

depuis son départ de la Terre.